Généralisation au cas complexe d'une relation de Mertens

Grégoire Favre

Ce travail a été effectué en vue de
l'obtention du Diplôme de mathématicien
de l'Université de Lausanne,
sous la direction du Professeur
Antoine Derighetti

juin 1998

Remerciements

Je tiens à remercier M. le professeur Antoine Derighetti de m'avoir donné le sujet du travail ainsi que de sa très grande disponibilité. Je tiens encore à remercier M. le professeur Henri Joris pour toute son aide. Finalement, je remercie le collège des assistants de l'Institut de Mathématique de l'Université de Lausanne.

GÉNÉRALISATION AU CAS COMPLEXE D'UNE RELATION DE MERTENS.

Grégoire Favre

7.6.1998

Abstract. Il s'agit de montrer et de déterminer $A, B \in \mathbb{C}$ avec $\displaystyle\sum_{0<\Re(q)\leqslant x} \frac{1}{q} = A \log x + B + o(1)$, pour $x \in \mathbb{R}$ grand et q une forme quadratique complexe définie positive.

Le cas de la forme réelle est dû à Mertens [6]. Dans [2] page 169, E. Landau reprend la question. Dans le même travail E. Landau évoque la possibilité de traiter le cas complexe.

INTRODUCTION

Théorème 1

Pour a, b, c réels, q forme quadratique de type positif[1], $x \in \mathbb{R}^+$ grand, le théorème de Kronecker-Mertens dit :

$$\sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\\ 0<q(u,v)\leqslant x}} \frac{1}{q(u,v)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log x + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{a}{\Delta} + \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}} C - \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \eta(\alpha)\eta(\beta) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Remarque 1

Ce théorème implique que le comportement asymptotique de cette somme est de la forme $A \log x + B$, où $A, B \in \mathbb{R}$.

Théorème 2

Pour a, b, c réels, q forme quadratique de type positif et $x \in \mathbb{R}^+$ grand, on a :

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}} \sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\\ 0<q(u,v)\leqslant x}} \frac{1}{q(u,v)^s} - \frac{A}{s-1} = B.$$

Remarque 2

Les constantes A, B sont celles du théorème 1. De plus ces théorèmes sont liés aux nombres de classes d'équivalences représentant un nombre entier; mais cela n'est pas l'objet de ce travail que d'en parler ici.

Remarque 3

Du théorème de Mertens avec un $o(1)$ à la place de $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ on peut déjà déduire la formule pour le nombre de classes.

[1] cela revient à supposer $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

CAS COMPLEXE

Définition 1

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On appelle **forme quadratique** le triplet ordonné (a, b, c).

Définition 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose alors $\Delta = \Delta(a, b, c) = 4\,\Re\,(a)\,\Re\,(c) - \Re\,(b)^2$.

Définition 3

À une forme quadratique $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ on associe, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, un nombre, noté $q(u, v)$, tel que $q(u, v) = au^2 + buv + cv^2$.

Définition 4

Une forme quadratique (a, b, c) est dite **réelle** si $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Définition 5

Une forme quadratique (a, b, c) est dite **définie positive**, si pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ on a $\Re\,\big(q(u, v)\big) > 0$.

Exemple 1

La forme $(1, 0, 1)$ est définie positive. Cela n'est pas le cas de $(1, 0, 0)$, car $q(0, 1) = 0$.

Proposition 1

Pour toute forme quadratique (a, b, c) réelle avec $\Delta > 0$ et $a > 0$, posons $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\right)$. Alors $\lambda > 0$ et $q(u, v) \geqslant \lambda(u^2 + v^2)$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

Une telle forme quadratique est **définie positive**.

Preuve.

Remarquons que $q(u, v) = au^2 + buv + cv^2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$ étant symétrique, elle est orthogonalement diagonalisable, i.e. il existe P orthogonale réelle telle que $P \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$.

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$ devant vérifier $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + c, \\ \lambda_1\lambda_2 = ac - \dfrac{1}{4}b^2. \end{cases}$ on obtient facilement que $\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\right), \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\left(a + c + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\right). \end{cases}$ Comme $a > 0$ et que $b^2 - 4ac < 0$ on a $c > 0$. Et de $\sqrt{(a-c)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + b^2} < \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4ac} = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2} = (a + c) > 0$, on conclut que $\lambda_1 > 0$.

En résumé $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

Comme P orthogonale réelle, on a $P^t = P^{-1}$. Posons $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ i.e. $P^t \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} P$ et $\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix}$. Donc $u^2 + v^2 =$

$(u \quad v)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (u' \quad v')PP^t\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (u' \quad v')PP^{-1}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (u' \quad v')I_2\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (u' \quad v')\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = u'^2 + v'^2$. Ainsi $q(u,v) = (u' \quad v')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ Donc $q(u,v) = \lambda_1 u'^2 + \lambda_2 v'^2 \geqslant \lambda_1(u'^2 + v'^2) = \lambda_1(u^2 + v^2)$.

En résumé $q(u,v) \geqslant \lambda_1(u^2 + v^2)$. La forme est clairement définie positive.

♯

Proposition 2

Avec les notations de la propositions précédentes, on a $\lambda_1 = \lambda_2$ si et seulement si $b = 0$ et $a = c$. Dans ce cas $\lambda_1 = \lambda_2 = a$. Et $q(u,v) = au^2 + av^2$.

Preuve.

$\lambda_1 = \lambda_2$ si et seulement si $(a-c)^2 + b^2 = 0$ d'où le résultat.

♯

Proposition 3

Pour toute forme quadratique $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ avec $\Delta > 0$ et $\Re(a) > 0$, posons $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\Re(a) + \Re(c) - \sqrt{\left(\Re(a) - \Re(c)\right)^2 + \Re(b)^2}\right)$. Alors $\lambda > 0$ et$\Re\left(q(u,v)\right) \geqslant \lambda(u^2 + v^2)$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

Preuve.

On se ramène au cas précédent, car $\Re\left(q(u,v)\right) = \Re(a)\,u^2 + \Re(b)\,uv + \Re(c)\,v^2$.

♯

Proposition 4

Une forme quadratique $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ est défine positive si et seulement si $\Delta > 0$ et $\Re(a) > 0$.

Preuve.

Supposons $\Delta > 0$ et $\Re(a) > 0$. On a que $\Re\left(q(u,v)\right) \geqslant \lambda(u^2 + v^2)$ avec $\lambda > 0$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

Réciproquement supposons q défine positive. Alors $q(1,0) = a$ et $\Re\left(q(1,0)\right) > 0$ donc $\Re(a) > 0$. Remarquons que $\Delta = 4$ dét $\begin{pmatrix} \Re(a) & \frac{1}{2}\Re(b) \\ \frac{1}{2}\Re(b) & \Re(c) \end{pmatrix}$. Supposons $\Delta \leqslant 0$, alors, il existe P orthogonale réelle telle que $P\begin{pmatrix} \Re(a) & \frac{1}{2}\Re(b) \\ \frac{1}{2}\Re(b) & \Re(c) \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_2 \leqslant 0$. Or $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car P est orthogonale réelle.

Et $(u' \quad v')\begin{pmatrix} \Re(a) & \frac{1}{2}\Re(b) \\ \frac{1}{2}\Re(b) & \Re(c) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = (0 \quad 1)P\begin{pmatrix} \Re(a) & \frac{1}{2}\Re(b) \\ \frac{1}{2}\Re(b) & \Re(c) \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$= (0 \quad 1)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \leqslant 0$, ce qui est impossible; car la forme quadratique est définie positive. Donc, on a bien $\Delta > 0$.

♯

Exemple 2

La forme $(1,0,1)$ est définie positive. Cela n'est pas le cas de $(1,0,0)$, car $\Delta = 0$.

Proposition 5

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $\Delta = 4\Re(a)\Re(c) - \Re(b)^2 > 0$ et $\Re(a) > 0$. Alors $b^2 - 4ac \not\geqslant 0$ ($b^2 - 4ac \in \mathbb{C} - [0, \infty)$).

Preuve.

Écrivons $a = A + iD$,$b = B + iE$,$c = C + iF$, et supposons $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Ce qui nous donne le système suivant: $\begin{cases} A > 0, \\ B^2 - 4AC < 0, \\ B^2 - E^2 + 2iBE - 4(AC - DF + iCD + iAF) \geqslant 0. \end{cases}$ En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient: $\begin{cases} A > 0, \\ B^2 < 4AC, \\ B^2 - E^2 - 4AC + 4DF \geqslant 0, \\ BE = 2CD + 2AF. \end{cases}$ De la troisième équation et de la deuxième, on a: $4AC > B^2 \geqslant E^2 + 4AC - 4DF$ donc $E^2 - 4DF < 0$ Le système devient: $\begin{cases} A > 0, \\ B^2 < 4AC, \\ E^2 < 4DF, \\ B^2 - E^2 - 4AC + 4DF \geqslant 0, \\ BE = 2CD + 2AF. \end{cases}$

Élevant la dernière équation au carré et comparant avec les deuxième et troisième termes, on a: $16ACDF > B^2E^2 = 4C^2D^2 + 8ACDF + 4A^2F^2$ et donc, $0 > 4C^2D^2 - 8ACDF + 4A^2F^2 = (2CD - 2AF)^2$, ce qui montre que le système n'a pas de solution.

♯

Déclaration 1

À partir de maintenant, si l'on ne précise rien, la forme (a, b, c) est supposée définie positive.

Définition 6

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$ (et avec $\Re(a) > 0$, $\Delta > 0$) on pose
$E(x) = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\} \mid \Re\left(au^2 + buv + cv^2\right) \leqslant x\}$.

Proposition 6

Supposons $x > 0$ $\Re(a) > 0$ et $\Delta > 0$. L'ensemble $E(x)$ est fini.

Preuve.

Pour tout $(u, v) \in E(x)$ on a $\Re\left(q(u, v)\right) \geqslant \lambda(u^2 + v^2)$ où $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}\right) > 0$. Ainsi $E(x) \subset \{\, (u, v) | \lambda(u^2 + v^2) \leqslant x \,\}$; or $\{\, (u, v) | u^2 + v^2 \leqslant \frac{x}{\lambda} \,\}$ est fini.

♯

Déclaration 2

À partir de maintenant, si l'on ne précise rien, $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$.

Définition 7

On pose $I(x) = \displaystyle\sum_{(u,v)\in E(x)} \frac{1}{au^2 + buv + cv^2}$.

Définition 8

Pour $1 \leqslant |v| \leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}$, on pose $\begin{cases} u_1(x,v) = \dfrac{-\Re(b)\,v - \sqrt{4\,\Re(a)\,x - \Delta v^2}}{2\,\Re(a)}, \\ u_2(x,v) = \dfrac{-\Re(b)\,v + \sqrt{4\,\Re(a)\,x - \Delta v^2}}{2\,\Re(a)}. \end{cases}$

Proposition 7

On a : $E(x) = \left\{ (u,0) \mid 1 \leqslant |u| \leqslant \sqrt{\frac{x}{\Re(a)}} \right\} \amalg \displaystyle\coprod_{1\leqslant|v|\leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \{ (u,v) | u_1(x,v) \leqslant u \leqslant u_2(x,v) \}$.

Preuve.

1) $E(x) \subset \left\{ (u,0) \mid 1 \leqslant |u| \leqslant \sqrt{\frac{x}{\Re(a)}} \right\} \amalg \displaystyle\coprod_{1\leqslant|v|\leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \{ (u,v) | u_1(x,v) \leqslant u \leqslant u_2(x,v) \}$

Supposons $v = 0$, alors $q(u,v) = au^2$ et donc $\Re\left(q(u,v)\right) = \Re(a)\,u^2 \leqslant x$ ainsi $u^2 \leqslant \frac{x}{\Re(a)}$ et finalement $|u| \leqslant \sqrt{\frac{x}{\Re(a)}}$. Supposons $v \neq 0$, alors $\Re(a)\,\Re\left(q(u,v)\right) = \Re(a)^2 u^2 + \Re(a)\,\Re(b)\,uv + \Re(a)\,\Re(c)\,v^2 = \left(\Re(a)\,u + \frac{\Re(b)v}{2}\right)^2 - \frac{\Re(b)^2 v^2}{4} + \Re(a)\,\Re(c)\,v^2 \leqslant \Re(a)\,x$ donc $v^2 \leqslant \frac{4\,\Re(a)x}{\Delta}$ et ainsi $1 \leqslant |v| \leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}$. D'autre part $\left(\Re(a)\,u + \frac{\Re(b)v}{2}\right)^2 \leqslant \frac{4\,\Re(a)x - \Delta v^2}{4}$, et donc $\left|\Re(a)\,u + \frac{\Re(b)v}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{4\,\Re(a)x - \Delta v^2}}{2}$. Et ainsi $u_1(x,v) \leqslant u \leqslant u_2(x,v)$.

2) $E(x) \supset \left\{ (u,0) \mid 1 \leqslant |u| \leqslant \sqrt{\frac{x}{\Re(a)}} \right\} \amalg \displaystyle\coprod_{1\leqslant|v|\leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \{ (u,v) | u_1(x,v) \leqslant u \leqslant u_2(x,v) \}$

Soit $1 \leqslant |u| \leqslant \sqrt{\frac{x}{\Re(a)}}$ alors, $\Re\left(q(u,0)\right) = \Re(a)\,u^2 \leqslant x$. Soient $1 \leqslant |v| \leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}$ et $u_1(x,v) \leqslant u \leqslant u_2(x,v)$ alors $4\,\Re(a)\,x - \Delta v^2 \geqslant 0$. On a $\left(\Re(a)\,u + \frac{\Re(b)v}{2}\right)^2 + \frac{\Delta v^2}{4} = \Re(a)\,\Re\left(q(u,v)\right)$ (*) comme pour 1). De même on a $\left|\Re(a)\,u + \frac{\Re(b)v}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{4\,\Re(a)x - \Delta v^2}}{2}$. On élève au carré: $\left(\Re(a)\,u + \frac{\Re(b)v}{2}\right)^2 \leqslant \Re(a)\,x - \frac{\Delta v^2}{4}$ et en comparant avec (*), on obtient $\Re(a)\,\Re\left(q(u,v)\right) \leqslant \Re(a)\,x$. Mais comme $\Re(a) > 0$, on a bien $\Re\left(q(u,v)\right) \leqslant x$.

♯

Proposition 8

On a : $I(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant|u|\leqslant\sqrt{\frac{x}{\Re(a)}}} \frac{1}{au^2} + \sum_{1\leqslant|v|\leqslant\sqrt{\frac{4x\,\Re(a)}{\Delta}}} \left(\sum_{u=u_1(x,v)}^{u_2(x,v)} \frac{1}{q(u,v)} \right)$.

Déclaration 3

À partir de maintenant, si l'on ne précise rien, v est tel que $1 \leqslant |v| \leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}$.

Définition 9

On pose : $S(x,v) = \displaystyle\sum_{u=u_1(x,v)}^{u_2(x,v)} \frac{1}{q(u,v)}$.

Proposition 9

On a le résultat suivant : $\displaystyle\sum_{1\leqslant|u|\leqslant\sqrt{\frac{x}{\Re(a)}}} \frac{1}{au^2} = \frac{2}{a} \sum_{u=1}^{\sqrt{\frac{x}{\Re(a)}}} \frac{1}{u^2}$.

Preuve.

Clairement.

♯

Proposition 10

On a : $I(x) = \frac{2}{a} \sum_{u=1}^{\sqrt{\frac{x}{\Re(a)}}} \frac{1}{u^2} + 2 \sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{x\,\Re(a)}{\Delta}}} S(x,v)$.

Preuve.

Soit $1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\frac{x\,\Re(a)}{\Delta}}$, $S(x,-v) = S(x,v)$ en effet $S(x,-v) = \sum_{u=u_1(x,-v)}^{u_2(x,-v)} \frac{1}{q(u,-v)}$, et comme $q(u,-v) = au^2 - buv + cv^2 = q(-u,v)$, $S(x,-v) = \sum_{u=\frac{\Re(b)v-\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2\,\Re(a)}}^{\frac{\Re(b)v+\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2\,\Re(a)})} \frac{1}{q(-u,v)}$. Posons $u' = -u$ on obtient $S(x,-v) = \sum_{u'=\frac{-\Re(b)v-\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2\,\Re(a)}}^{\frac{-\Re(b)v+\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2\,\Re(a)})} \frac{1}{q(u',v)} = S(x,v)$.

♯

Définition 10

Pour $1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\frac{x\,\Re(a)}{\Delta}}$, on pose $T(x,v) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)}$.

Définition 11

Posons $\Phi = b^2 - 4ac$ (Alors, on sait que $\Phi \ngeqslant 0$).

Remarque 1

Nous allons définir clairement la racine carrée d'un nombre complexe. Soit donc $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Alors, il y a une et une seule manière de noter $\gamma = re^{i\theta}$, où $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi)$. On a alors $\sqrt{\gamma} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$;et $\sqrt{0} = 0$.

Définition 12

Posons $\alpha = \alpha(a,b,c) = \frac{-b+\sqrt{\Phi}}{2a}$ et $\beta = \beta(a,b,c) = \frac{b+\sqrt{\Phi}}{2a}$.

Proposition 11

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a $1 + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} = \pi z \cot(\pi z)$.

Preuve.

Cf Theory & Application Of Infinite series, aux éditions Hafner Publishing Company, par Dr. Konrad Knopp (page 419).

♯

Proposition 12

Pour $1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\frac{x\,\Re(a)}{\Delta}}$, $T(x,v)$ converge absolument, sa somme vaut $\frac{2\pi i}{v\sqrt{\Phi}} + \frac{2\pi i}{v\sqrt{\Phi}} \left(\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1 - e^{2\pi i\alpha v}} + \frac{e^{2\pi i\beta v}}{1 - e^{2\pi i\beta v}} \right)$.

Preuve.

Nous avons vu que $\mid q(u,v) \mid \geqslant \Re\left(q(u,v)\right) \geqslant \lambda(u^2+v^2)$où $\lambda \geqslant 0$; et donc $\frac{1}{|q(u,v)|} \leqslant \frac{1}{\lambda(u^2+v^2)}$. Ce qui implique $\displaystyle\sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mid q(u,v) \mid} \leqslant \sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(u^2+v^2)}$ qui converge, d'où la convergence absolue de la série.

$aq(u,v) = a^2u^2 + abuv + acv^2 = \left(au + \frac{bv}{2}\right)^2 - \frac{b^2v^2}{4} + \frac{4acv^2}{4}$. Donc $aq(u,v) = \left(au + \frac{bv}{2}\right)^2 - \frac{\Phi v^2}{4} = \left(au + \frac{bv}{2} + \frac{\sqrt{\Phi}v}{2}\right)\left(au + \frac{bv}{2} - \frac{\sqrt{\Phi}v}{2}\right)$. Alors $q(u,v) = a(u - v\alpha)(u + v\beta)$. Mais comme $q(u,v)$ est définie positive, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ on a $\Re\left(q(u,v)\right) > 0$ et en particulier $q(u,v) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Ainsi $(u - v\alpha) \neq 0$ et $(u + v\beta) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Ce qui implique clairement que $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, ce qui nous sera très utile par la suite.

Comme $\alpha + \beta = \frac{\sqrt{\Phi}}{a}$ et que $\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\beta v + u} = \frac{(\alpha+\beta)v}{(\alpha v - u)(\beta v + u)}$ on a $\frac{1}{q(u,v)} = \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}}\left(\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\beta v + u}\right)$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et en particulier pour tout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{u=-N}^{N} \frac{1}{q(u,v)} = \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}} \sum_{u=-N}^{N} \left(\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\beta v + u}\right) =$

$$= \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{1}{\alpha v} + \frac{1}{\beta v} + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\beta v + u}\right) + \sum_{u=-N}^{1}\left(\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\beta v + u}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{1}{\alpha v} + \frac{1}{\beta v} + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\beta v + u}\right) + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{1}{\alpha v + u} + \frac{1}{\beta v - u}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{1}{\alpha v} + \frac{1}{\beta v} + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{1}{\alpha v - u} + \frac{1}{\alpha v - u}\right) + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{1}{\beta v + u} + \frac{1}{\beta v - u}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{1}{\alpha v} + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{2\alpha v}{\alpha^2 v^2 - u^2}\right) + \frac{1}{\beta v} + \sum_{u=1}^{N}\left(\frac{2\beta v}{\beta^2 v^2 - u^2}\right)\right].$$

Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, on a $1 + 2z^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} = \pi z \cot(\pi z)$.

Et comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z}\left(1 + 2z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} - 1\right)$ ce qui donne finalement la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z) - \frac{1}{z}$.

On a montré que $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, et donc $\alpha v \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ et $\beta v \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, en particulier $\alpha v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et $\beta v \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et ainsi:

$$T(x,v) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)} = \frac{-1}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{1}{\alpha v} + \pi\cot(\pi\alpha v) - \frac{1}{\alpha v} + \frac{1}{\beta v} + \pi\cot(\pi\beta v) - \frac{1}{\beta v}\right] =$$

$$= \frac{-\pi}{v\sqrt{\Phi}}\left[\cot(\pi\alpha v) + \cot(\pi\beta v)\right] = \frac{-i\pi}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{e^{i\pi\alpha v} + e^{-i\pi\alpha v}}{e^{i\pi\alpha v} - e^{-i\pi\alpha v}} + \frac{e^{i\pi\beta v} + e^{-i\pi\beta v}}{e^{i\pi\beta v} - e^{-i\pi\beta v}}\right] =$$

$$= \frac{-i\pi}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{e^{2i\pi\alpha v} + 1}{e^{2i\pi\alpha v} - 1} + \frac{e^{2i\pi\beta v} + 1}{e^{2i\pi\beta v} - 1}\right] = \frac{-i\pi}{v\sqrt{\Phi}}\left[\frac{2e^{2i\pi\alpha v} - e^{2i\pi\alpha v} + 1}{e^{2i\pi\alpha v} - 1} + \frac{e^{2i\pi\beta v} - e^{2i\pi\beta v} + 1}{e^{2i\pi\beta v} - 1}\right].$$

Ces égalités sont bien définies car $e^{i\pi\alpha v} = e^{-i\pi\alpha v}$ est équivalent à $e^{2i\pi\alpha v} = 1$, et en prenant la norme, cela impliquerait $e^{-2\pi\Im(\alpha)v} = 1$ ce qui n'est pas le cas puisque $\Im(\alpha) \neq 0$. Et de même pour β.

$\sharp$

Remarque 2

La preuve de la proposition précédente montre que pour tout $1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\dfrac{x\,\Re(a)}{\Delta}}$ on a $e^{2\pi i\alpha v} \neq 1$ et $e^{2\pi i\beta v} \neq 1$.

Remarque 3

La preuve de la proposition précédente montre aussi que $\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Proposition 13

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < 1$, on a $\log(1+z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k}$.

Preuve.

On a $\log(1+z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k}$ pour $0 \leqslant z < 1$. Donc l'égalité dans $|z| < 1$.

♯

Proposition 14

La série de la proposition précédente revient à prendre la détermination principale du log, à savoir :

$$\log(w) = \log|w| + i\, arg(w)$$

où $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ (et $-\pi \leqslant arg(w) < \pi$).

Preuve.

Theory and application of infinite series, par Dr Konrad Knopp, Chapter XII. Series of complex terms.

♯

Remarque 4

Nous considérons le résultat suivant connu:

Soient $m \in \mathbb{Z}$, $f \in [0,\infty)^{[m,\infty)}$ monotone décroissante sur $[m,\infty)$. Supposons au sens de Riemann impropre, l'existence de $\int_m^{\infty} f(t)dt$. Alors, $\sum_{u=m}^{\infty} f(u)$ converge. De plus, il existe $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ avec

$$\sum_{u=m}^{\infty} f(u) = \int_m^{\infty} f(t)dt + \theta f(m).$$

Remarque 5

Nous considérons aussi le résultat suivant connu:

Soient $m \in \mathbb{Z}$, $f \in [0,\infty)^{(-\infty,m]}$ monotone croissante sur $(-\infty,m]$. Supposons au sens de Riemann impropre, l'existence de $\int_{-\infty}^{m} f(t)dt$. Ainsi $\sum_{u=-\infty}^{m} f(u)$ converge. De plus, il existe $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ avec

$$\sum_{u=-\infty}^{m} f(u) = \int_{-\infty}^{m} f(t)dt + \theta f(m).$$

Proposition 15

Pour $1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, alors
$\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}} + \frac{\epsilon_1(x,v)}{x}$ où $\mid \epsilon_1(x,v) \mid \leqslant 1$.

Preuve.

Notons $U(x,v)$ sa somme. Soit $u \geqslant u_2(x,v)$ $(u \in \mathbb{R})$ $\frac{\partial}{\partial u} q(u,v) = 2au + bv \geqslant 2au_2(x,v) + bv = \sqrt{4ax - \Delta v^2} \geqslant 0$, donc sur $[u_2(x,v),\infty)$ $u \mapsto q(u,v)$ est croissante, donc sur $[u_2(x,v),\infty)$ $u \mapsto \frac{1}{q(u,v)}$ est décroissante.

Nous montrerons que $\displaystyle\int_{[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)}$ existe au sens de Riemann impropre. Ce qui impliquera que la série $\displaystyle\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)}$ converge et qu'il existe $0 \leqslant \nu(x,v) \leqslant 1$ avec

$$U(x,v) = \int_{[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)} + \frac{\nu(x,v)}{a([u_2(x,v)]+1)^2 + bv([u_2(x,v)]+1) + cv^2}.$$

On a $u_2(x,v) \leqslant [u_2(x,v)]+1$ donc $\dfrac{1}{q(u_2(x,v),v)} \geqslant \dfrac{1}{q([u_2(x,v)]+1,v)}$ et ainsi $\dfrac{\nu(x,v)}{q([u_2(x,v)]+1,v)} = \dfrac{1}{q(u_2(x,v))}\dfrac{q(u_2(x,v),v)\nu(x,v)}{q([u_2(x,v)]+1,v)} = \dfrac{\mu(x,v)}{q(u_2(x,v),v)}$ avec $0 \leqslant \mu(x,v) \leqslant 1$. Ainsi $U(x,v) = \displaystyle\int_{[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)} + \frac{\mu(x,v)}{q(u_2(x,v),v)}$.

Et la deuxième formule de la moyenne nous donne : $U(x,v) = \displaystyle\int_{u_2(x,v)}^{[u_2(x,v)]+1} \frac{du}{q(u,v)} = \frac{1}{q(u_2(x,v),v)} \int_{u_2(x,v)}^{\eta} du = \frac{\rho(x,v)}{q(u_2(x,v),v)}$ où $u_2(x,v) \leqslant \eta \leqslant [u_2(x,v)]+1$ et $0 \leqslant \rho(x,v) = \eta - u_2(x,v) \leqslant 1$. Ainsi $U(x,v) = \displaystyle\int_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)} + \frac{\mu(x,v)-\rho(x,v)}{q(u_2(x,v),v)} = \int_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)} + \frac{\epsilon_1(x,v)}{q(u_2(x,v),v)}$ où $\mid \epsilon_1(x,v) \mid \leqslant 1$. $\displaystyle\int \frac{du}{q(u,v)} = \int \frac{adu}{\left(au+\frac{bv}{2}\right)^2 + \frac{\Delta v^2}{4}}$ on pose $t = au + \frac{bv}{2}$, et alors $\displaystyle\int \frac{du}{q(u,v)} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{\Delta v^2}{4}} = \frac{4}{\Delta v^2}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{v\sqrt{\Delta}}\right)^2+1}$ on pose $s = \frac{2t}{v\sqrt{\Delta}}$, ce qui donne finalement $\displaystyle\int \frac{du}{q(u,v)} = \frac{4}{\Delta v^2}\frac{v\sqrt{\Delta}}{2}\int \frac{ds}{1+s^2} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\arctan s + C = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(au+\frac{bv}{2}\right) + C$. Et ainsi $\displaystyle\int_{[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)}$ vaut $\displaystyle\frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(a\left([u_2(x,v)]+1\right)+\frac{bv}{2}\right)\right)$ donc elle existe.

De plus $U(x,v) = \dfrac{\epsilon_1(x,v)}{q(u_2(x,v),v)} + \dfrac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(a\left([u_2(x,v)]+1\right)+\dfrac{bv}{2}\right)\right).\ \dfrac{bv}{2} + au_2(x,v) = \dfrac{bv}{2} - \dfrac{bv}{2} + \dfrac{\sqrt{4ax-\Delta v^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{4ax-\Delta v^2}}{2}$. Donc $\displaystyle\int_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{4ax-\Delta v^2}}{v\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{\frac{4ax}{\Delta v^2}-1}\right)$. Posons $y = \sqrt{\dfrac{4ax}{\Delta v^2}-1}$, $1 \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{ax}{\Delta}}$ et $z = \arctan y$, $0 \leqslant z < \frac{\pi}{2}$ $\dfrac{\tan z}{\sqrt{1+\tan^2 z}} = \dfrac{\frac{\sin z}{\cos z}}{\sqrt{\frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z}}} = \dfrac{\sin z}{\cos z}\sqrt{\cos^2 z} = \dfrac{\sin z}{\cos z}\cos z = \sin z$ (comme $0 < \cos z \leqslant 1$ on a $\sqrt{\cos^2 z} = \cos z$). $\frac{y}{1+y^2} = \sin z$ donc $z = \arcsin\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ $y^2+1 = \frac{4ax}{\Delta v^2}\ \frac{y}{1+y^2} = \frac{v\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{ax}}\sqrt{\frac{4ax}{\Delta v^2}-1} = \sqrt{1-\frac{v^2\Delta}{4ax}}$ $z = \arcsin\sqrt{1-\frac{v^2\Delta}{4ax}}$ Ainsi $U(x,v) = \dfrac{\epsilon_1(x,v)}{q(u_2(x,v),v)} + \dfrac{2}{v\sqrt{\Delta}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-\dfrac{v^2\Delta}{4ax}}\right)$ et $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-\dfrac{v^2\Delta}{4ax}} = \arccos\sqrt{1-\dfrac{v^2\Delta}{4ax}}$. Posons $w = \dfrac{\sqrt{\Delta}v}{\sqrt{4ax}}$ ce qui donne : $\arccos\sqrt{1-\frac{v^2\Delta}{4ax}} = \arccos\sqrt{1-w^2} = \tau$ où $0 < w \leqslant 1$ donc $0 < \tau \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\cos\tau = \sqrt{1-w^2}$ $\cos^2\tau = 1-w^2 = 1-\sin^2\tau$ $|w| = |\sin\tau|$ $w = \sin\tau$ donc $\tau = \arcsin w$ on obtient donc : $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-\dfrac{v^2\Delta}{4ax}} = \arcsin\left(\dfrac{v}{2}\sqrt{\dfrac{\Delta}{ax}}\right)$. D'où $U(x,v) = \dfrac{\epsilon_1(x,v)}{q(u_2(x,v),v)} + \dfrac{2}{v\sqrt{\Delta}}\arcsin\left(\dfrac{v}{2}\sqrt{\dfrac{\Delta}{ax}}\right)$. $aq(u_2(x,v),v) = \left(au_2(x,v)+\frac{bv}{2}\right)^2 + \frac{\Delta v^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{4ax-\Delta v^2}}{2}\right)^2 + \frac{\Delta v^2}{4} = \frac{4ax-\Delta v^2}{4} +$

$\frac{\Delta v^2}{4} = ax$ donc $q\big(u_2(x,v),v\big) = x$. Ainsi $U(x,v) = \dfrac{\epsilon_1(x,v)}{x} + \dfrac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin\left(\dfrac{v}{2}\sqrt{\dfrac{\Delta}{ax}}\right)$.

♯

Proposition 16

Pour $1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, alors
$\displaystyle\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{1}{q(u,v)} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{ax}} + \frac{\epsilon_2(x,v)}{x}$ où $\mid \epsilon_2(x,v) \mid \leqslant 1$.

Preuve.

Soit $V(x,v)$ sa somme. Soit $u \leqslant u_1(x,v)$ $(u \in \mathbb{R})$ $\frac{\partial}{\partial u} q(u,v) = 2au + bv \leqslant bv + 2au_1(x,v) = bv + 2a = bv + 2a\left(\frac{-bv-\sqrt{4ax-\Delta v^2}}{2a}\right) = -\sqrt{4ax - \Delta v^2} \leqslant 0$, donc sur $(-\infty, u_1(x,v)]$ $u \mapsto q(u,v)$ est décroissante, donc sur $(-\infty, u_1(x,v)]$ $u \mapsto \frac{1}{q(u,v)}$ est croissante. Donc la série $\displaystyle\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{1}{q(u,v)}$ converge. De plus $V(x,v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{du}{q(u,v)} + \frac{\epsilon(x,v)}{q([u_1(x,v)],v)}$. Où $0 \leqslant \epsilon(x,v) \leqslant 1$ et on conclut comme dans la preuve précédente.

♯

Proposition 17

On a : $S(x,v) = T(x,v) + \epsilon(x,v)$ où $\mid \epsilon(x,v) \mid \leqslant \frac{4}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)x}} + \frac{\epsilon_3(x,v)}{x}$avec $\mid \epsilon_3(x,v) \mid \leqslant 2$.

Preuve.

On a $0 \leqslant |S(x,v) - T(x,v)| = \left|\displaystyle\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{1}{q(u,v)} + \sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)}\right| \leqslant \left|\displaystyle\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{1}{q(u,v)}\right| + \left|\displaystyle\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{1}{|q(u,v)|} + \sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{|q(u,v|)} \leqslant \sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]} \frac{1}{\Re\left(q(u,v)\right)} + \displaystyle\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{\Re\left(q(u,v)\right)} = \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)\,x}} + \frac{\epsilon_1(x,v)}{x} + \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)\,x}} + \frac{\epsilon_2(x,v)}{x}$
$= \dfrac{4}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \dfrac{v}{2}\sqrt{\dfrac{\Delta}{\Re(a)\,x}} + \dfrac{\epsilon_3(x,v)}{x}$ où $\mid \epsilon_3(x,v) \mid \leqslant 2$.

♯

Définition 13

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ posons $\psi(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$.

Définition 14

On appelle constante d'Euler-Mascheroni $C = \dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^2} dx$.

Proposition 18

On a environ : $C \cong 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576723488 48\ldots$

Plus sérieusement : $C = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - \log x$.

Pour tout $x \geqslant 1$ on a $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} - C - \log x\right| \leqslant \frac{1}{x}$.

Preuve.

Ce sont des faits relativement bien connus ...

♯

Proposition 19

On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{1}{n} - \frac{\log x}{2} - \log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}} - C = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Preuve.

Pour tout $y \geqslant 1$ on a $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{y} \frac{1}{n} - C - \log y\right| \leqslant \frac{1}{y}$. Et comme quelque soit $x \geqslant \frac{\Delta}{4\,\Re(a)}$ on a $y = 2\sqrt{\dfrac{\Re(a)\,x}{\Delta}} \geqslant 1$ et de $\log 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}} = \log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}} + \frac{\log x}{2}$, on conclut.

♯

Définition 15

Pour $\omega \in \mathbb{H} = \{\,\tau |\, \Im(\tau) > 0\,\}$ on pose $\eta(\omega) = e^{\frac{i\pi\omega}{12}} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i n\omega}\right)$.

C'est la fonction eta de Dedekind.

Proposition 20

La fonction eta de Dedekind converge absolument et ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathbb{H}$ de Poincaré.

Preuve.

Il y a deux références possibles :

Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, aux éditions Springer-Verlag, par Tom M. Apostol. (Chapitre 3: The Dedekind eta function).

Et aussi: Elliptic Modular Functions, aux éditions Springer-Verlag, par B. Schoeneberg. (Theorem 8).

♯

Proposition 21

Pour tout forme quadratique définie positive, α et β sont dans $\mathbb{H}$.

Preuve.

Nous avons déja montré que $\alpha, \beta \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Nous allons montrer que l'ensemble des formes quadratiques définies positives est convexe.

Soient p, q deux formes définies positives, c'est-à-dire $\Re\left(q(u,v)\right), \Re\left(p(u,v)\right) > 0$ pout tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{\,(0,0)\,\}$. Alors, pour de telles (u,v), on a : $\Re\left(\lambda q(u,v) + (1-\lambda)p(u,v)\right) = \lambda\,\Re\left(q(u,v)\right) + (1-\lambda)\,\Re\left(p(u,v)\right) > 0$ pour tout $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Donc l'ensemble des formes quadratiques définies positives est convexe, soit $\mathfrak{C}$ cet ensemble.

Rappelons que $\alpha(a,b,c) = \frac{-b+\sqrt{\Phi}}{2a}$ et $\beta(a,b,c) = \frac{b+\sqrt{\Phi}}{2a}$.

On a que $\alpha(1,0,1) = \beta(1,0,1) = i \in \mathbb{H}$. Comme $\Phi \ngeqslant 0$, α, β sont des fonctions continues de $\mathfrak{C}$ dans $\mathbb{C}$. Et ainsi $\alpha(\mathfrak{C})$ et $\beta(\mathfrak{C})$ sont connexes par arcs. Supposons qu'il existe $(a,b,c) \in \mathfrak{C}$ tel que $\alpha(a,b,c)$ ou

$\beta(a,b,c) \in \mathbb{H}^-$. Alors, il existe un arc reliant un point de $\mathbb{H}$ à un point de $\mathbb{H}^-$ qui ne passe pas par $\mathbb{R}$, ce qui est contradictoire.

$\sharp$

Proposition 22

On a : $\displaystyle\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{e^{2\pi i\alpha v}}{v\left(1-e^{2\pi i\alpha v}\right)} - \frac{i\pi\alpha}{12} + \log\eta(\alpha) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Preuve.

On a $\left|e^{2\pi i\alpha v}\right| = \left|e^{2\pi i\,\Re(\alpha)v}\right| \cdot \left|e^{-2\pi\,\Im(\alpha)v}\right| = \left|e^{-2\pi\,\Im(\alpha)v}\right| < 1$. Posons $q = e^{-2\pi\,\Im(\alpha)v}$, alors $0 < q < 1$ car $\Im(\alpha) > 0$. De plus pour tout $v \in \mathbb{N}$, on a $\left|e^{2\pi i\alpha v} - 1\right| \geqslant \left||1| - \left|e^{2\pi i\alpha v}\right|\right| = \left|1-q^v\right| = 1-q^v$. Ainsi $\left|\dfrac{e^{2\pi i\alpha v}}{v\left(1-e^{2\pi i\alpha v}\right)}\right| = \dfrac{q^v}{v\left|e^{2\pi i\alpha v}-1\right|} \leqslant \dfrac{q^v}{v\left(1-q^v\right)} \leqslant \dfrac{1}{\left(q^{-v}-1\right)} \leqslant \dfrac{1}{q^{-v}} = q^v$. Et comme la série $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty} q^v$ est convergente, il en résulte la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha v}}{v\left(1-e^{2\pi i\alpha v}\right)}$.

$\displaystyle\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} - \sum_{v=\left[2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}}$. Occupons-nous de majorer le dernier terme : $\displaystyle\left|\sum_{v=\left[2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}}\right| \leqslant \sum_{v=2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}^{\infty} \frac{1}{v}\left|\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}}\right| \leqslant \sum_{v=2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}^{\infty} \frac{1}{v(q^{-v}-1)} \leqslant \sum_{v=2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}^{\infty} q^v =$ $\displaystyle\sum_{w=0}^{\infty} q^{w+2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} = \frac{q^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}}{1-q} = \frac{\sqrt{\Delta}}{e^{4\pi v\,\Im(\alpha)\sqrt{x\,\Re(a)}}}$. Taylor nous dit que pour tout $\epsilon \geqslant 0$, on a $e^{\epsilon} \geqslant 1+\epsilon$, et donc $\displaystyle\sum_{v=\left[2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}\right]+1}^{\infty} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Calculons $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}}$. Soit $v \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i\alpha m v}$ car $\left|e^{2\pi i\alpha v}\right| = q^v$ (série géométrique). Comme $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\sum_{m=1}^{\infty} q^{mv}$ converge donc $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{v=1}^{\infty}\frac{q^{mv}}{v}\right)$ converge et $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{q^{mv}}{v} = \sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\sum_{m=1}^{\infty} q^{mv}$. Il en résulte la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\alpha m v}}{v}$. La somme de cette série étant $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\alpha m v}}{v} = -\sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v-1}\frac{\left(-e^{2\pi i\alpha m}\right)^v}{v} = -\log\left(1-e^{2\pi i\alpha m}\right)$, $\left(\left|e^{2\pi i\alpha m}\right| < 1\right)$. Par conséquent $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} = -\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1-e^{2\pi i\alpha m}\right) = -\log\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i\alpha m}\right)$. Pour tout $\omega \in \mathbb{H} = \{\tau | \Im(\tau) > 0\}$ on a $\displaystyle\eta(\omega) = e^{\frac{i\pi\omega}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i n\omega}\right)$. Or $\alpha \in \mathbb{H}$, et ainsi $\displaystyle\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\alpha v}}{1-e^{2\pi i\alpha v}} = -\log\eta(\alpha) + \frac{i\pi\alpha}{12}$.

$\sharp$

Proposition 23

On a : $\displaystyle\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{1}{v}\frac{e^{2\pi i\beta v}}{1-e^{2\pi i\beta v}} - \frac{i\pi\beta}{12} + \log\eta(\beta) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Preuve.

La preuve est identique à la précédente !

♯

Remarque 6

On rappelle une version de la formule sommatoire d'Euler :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ admettant une dérivée continue sur $[a, b]$. Alors on a

$$\sum_{a<m\leqslant b} f(m) = \int_a^b f(x)dx + \psi(a)f(a) - \psi(b)f(b) + \int_a^b \psi(x)f^{'}(x)dx.$$

Proposition 24

On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6} = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Preuve.

C'est une application directe de la formule sommatoire d'Euler avec $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $[1, x]$, et on suppose connu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

♯

Proposition 25

On a : $\displaystyle I(x) = \frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{\log x}{2} + \log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}} + C - \log\eta(\alpha)\eta(\beta)\right) + 2\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \epsilon(x, v) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Preuve.

$\displaystyle I(x) = \frac{2}{a}\frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\Re(a)}{\sqrt{x}}\right) + \frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{\log x}{2} + \log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}} + C\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\log\eta(\alpha) - \frac{i\pi\alpha}{12}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\log\eta(\beta) - \frac{i\pi\beta}{12}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 2\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \epsilon(x, v)$. Et on a $\displaystyle O\left(\frac{\Re(a)}{\sqrt{x}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. De plus, comme $\displaystyle\frac{\pi^2\alpha}{3\sqrt{\Phi}} + \frac{\pi^2\beta}{3\sqrt{\Phi}} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{\Phi}}(\alpha + \beta) = \frac{\pi^2}{3a}$, on conclut.

♯

Proposition 26

On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{y} \frac{1}{n}\arcsin\frac{n}{y} = \frac{\pi\log 2}{2} + O\left(\frac{1}{y}\right)$.

Preuve.

Soit $y > 1$, pour tout $0 < t \leqslant y$ posons $f(t) = \dfrac{1}{t}\arcsin\dfrac{t}{y}$ et $f(0) = \dfrac{1}{y}$. Pour tout $0 < t < y$, $f^{'}(t) = -\dfrac{1}{t^2}\arcsin\dfrac{t}{y} + \dfrac{1}{t}\dfrac{1}{\sqrt{y^2 - t^2}}$.

Pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$ on a $\displaystyle\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(2n-1)!!}{2n!!(2n+1)}$. Si de plus $x \neq 0$ $\dfrac{\arcsin x}{x} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}(2n-1)!!}{2n!!(2n+1)}$ donc pour tout $0 < t \leqslant y$, $\dfrac{\arcsin\frac{t}{y}}{\frac{t}{y}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}(2n-1)!!}{y^{2n}2n!!(2n+1)} = \frac{y\arcsin\frac{t}{y}}{t}$ $f(t) = \dfrac{1}{y} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}(2n-1)!!}{y^{2n+1}2n!!(2n+1)}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} f(t) = \frac{1}{y}$ et ainsi $f \in C([0, y])$. Soit $0 < t \leqslant y$. $\dfrac{1}{t^2}\arcsin\dfrac{t}{y} = \dfrac{1}{ty} +$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}(2n-1)!!}{y^{2n+1}2n!!(2n+1)}$ donc $\lim_{t\to 0^+} f^{'}(t) = \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{ty} + \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{y^2-t^2}} = (\text{B.-H.}) = 0$ ainsi $f^{'}(0)$ existe et vaut 0.

Soit $0 < \epsilon < 1$. Alors f est à dérivée continue sur $[0, y-\epsilon]$. Par la formule d'Euler $\sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) = \int_0^{y-\epsilon} f(t)dt + \psi(0)f(0) - \psi(y-\epsilon)f(y-\epsilon) + \int_0^{y-\epsilon} f^{'}(t)\psi(t)dt$. Nota Bene, vu que $f \in C[0,y]$, $\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{y-\epsilon} f(t)dt = \int_0^{y} f(t)dt$, $\psi(0) = -\frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{1}{y}$, $f(y-\epsilon) = \frac{1}{y-\epsilon}\arcsin\frac{y-\epsilon}{y}$, $\int_0^{y-\epsilon} f(t)dt = \int_0^{y-\epsilon} \frac{1}{t}\arcsin\frac{t}{y}dt \overset{\frac{t}{y}=u}{=} \int_0^{\frac{y-\epsilon}{y}} \frac{\arcsin u}{u}du \overset{\arcsin u = v}{=} \int_0^{\arcsin\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right)} \frac{v}{\sin v}\cos v dv = [v\log\sin v]_0^{\arcsin\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right)} - \int_0^{\arcsin\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right)} \log\sin v dv = \arcsin\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right)\log\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right) - \int_0^{\arcsin\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right)} \log\sin v dv \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin v dv = \frac{\pi}{2}\log 2$.

Nous avons pour tout $\left|\sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) - \int_{n=1}^{y-\epsilon} f(t)dt\right| \leqslant \left|\Psi(0)f(0) - \Psi(y-\epsilon)f(y-\epsilon) + \int_0^{y-\epsilon} f^{'}(t)\Psi(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}|f(y-\epsilon)| + \left|\int_0^{y-\epsilon} f^{'}(t)\Psi(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}|f(y-\epsilon)| + \frac{1}{2}\int_0^{y-\epsilon} \left|f^{'}(t)\right| dt$.

Soit $0 < \epsilon < \min\left\{1, \frac{y}{2}\right\}$, $-\epsilon > -\frac{y}{2}$, $y-\epsilon > \frac{y}{2}$, $\frac{1}{2(y-\epsilon)} < \frac{1}{y}$ donc $|f(y-\epsilon)| = \frac{1}{y-\epsilon}\left|\arcsin\left(1-\frac{\epsilon}{y}\right)\right| \leqslant \frac{\pi}{2(y-\epsilon)} < \frac{\pi}{y}$. Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) - \int_{n=1}^{y-\epsilon} f(t)dt\right| < \frac{1}{2y} + \frac{\pi}{2y} + \frac{1}{2}\int_0^{y-\epsilon} \left|f^{'}(t)\right| dt$. Or pour tout $0 < t \leqslant y-\epsilon$ on a $f^{'}(t) \geqslant 0$, en effet : $t^2 f^{'}(t) = -\arcsin\frac{t}{y} + \frac{t}{\sqrt{y^2-t^2}}$. On pose $\frac{t}{y} = x$ (alors $0 < x \leqslant 1-\frac{\epsilon}{y}$). Il suffit de vérifier $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant \arcsin x$, on a : $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(2n-1)!!}{2n!!}$ et $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(2n-1)!!}{2n!!(2n+1)}$ et comme tout converge absolument, $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(2n-1)!!}{2n!!}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \geqslant 0$.

Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) - \int_{n=1}^{y-\epsilon} f(t)dt\right| < \frac{\pi+1}{2y} + \frac{1}{2}\int_0^{y-\epsilon} f^{'}(t)dt = \frac{\pi+1}{2y} + \frac{1}{2}(f(y-\epsilon) - f(0)) = \frac{\pi}{2y} - \frac{\arcsin\frac{y-\epsilon}{y}}{2(y-\epsilon)} \leqslant \frac{\pi}{2y} + \frac{\pi}{4(y-\epsilon)} \leqslant \frac{\pi}{y}$. En résumé pour tout $0 < \epsilon < \min\left\{1, \frac{y}{2}\right\}$, on a : $\left|\sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) - \int_{n=1}^{y-\epsilon} f(t)dt\right| < \frac{\pi}{y}$.

Supposons $y \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) = \sum_{n=1}^{y} f(n)$ d'où $\left|\sum_{n=1}^{y} f(n) - \frac{\pi}{2}\log 2\right| < \frac{\pi}{y}$.

Supposons $y \notin \mathbb{N}$, alors $\lim_{\epsilon\to 0^+} \sum_{n=1}^{y-\epsilon} f(n) = \sum_{n=1}^{y-1} f(n)$ d'où $\left|\sum_{n=1}^{y-1} f(n) - \frac{\pi}{2}\log 2\right| < \frac{\pi}{y}$, i.e. $\frac{\pi}{2}\log 2 - \frac{\pi}{y} < \sum_{n=1}^{y-1} f(n) < \frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{\pi}{y}$, $\frac{\pi}{2}\log 2 - \frac{\pi}{y} + f(y) < \sum_{n=1}^{y} f(n) < \frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{\pi}{y} + f(y)$, $\frac{\pi}{2}\log 2 - \frac{\pi}{2y} < \sum_{n=1}^{y} f(n) < \frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{3\pi}{2y}$, $\frac{\pi}{2}\log 2 - \frac{3\pi}{2y} < \sum_{n=1}^{y} f(n) < \frac{\pi}{2}\log 2 + \frac{3\pi}{2y}$, d'où $\left|\sum_{n=1}^{y} f(n) - \frac{\pi}{2}\log 2\right| < \frac{3\pi}{2y}$.

♯

Proposition 27

On a : $I(x) = \frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{\log x}{2} + \log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}} + C - \log\eta(\alpha)\eta(\beta)\right) + A(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, où $|A(x)| \leqslant \frac{4\pi\log 2}{\sqrt{\Delta}}$.

Preuve.

$$2\left|\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\frac{4}{v\sqrt{\Delta}}\arcsin\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)x}}+\frac{\epsilon_3(x,v)}{x}\right|\leqslant 2\left|\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\frac{4}{v\sqrt{\Delta}}\arcsin\frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)x}}\right|+2\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\frac{2}{x}.$$

En posant $y=2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}$, on obtient, pour la majoration : $\frac{8}{\sqrt{\Delta}}\left|\sum_{v=1}^{y}\frac{\arcsin\frac{v}{y}}{v}\right|+\frac{4}{x}\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}1=$
$\frac{8}{\sqrt{\Delta}}\left|\frac{\pi\log 2}{2}+O\left(\frac{1}{y}\right)\right|+\frac{4}{x}\left[2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}\right]\leqslant\frac{8}{\sqrt{\Delta}}\left|\frac{\pi\log 2}{2}+O\left(\sqrt{\frac{\Delta}{4x\Re(a)}}\right)\right|+\frac{8}{x}\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}=$
$\frac{8}{\sqrt{\Delta}}\left|\frac{\pi\log 2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leqslant\frac{8}{\sqrt{\Delta}}\left|\frac{\pi\log 2}{2}\right|+\frac{8}{\sqrt{\Delta}}\left|O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{4\pi\log 2}{\sqrt{\Delta}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

♯

Théorème 1

Pour (a,b,c) une forme quadratique définie positive et $x\in\mathbb{R}^+$ grand, on a

$$\sum_{(u,v)\in E(x)}\frac{1}{au^2+buv+cv^2}=A\log x+B+C(x)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

où $A=\frac{2\pi i}{\sqrt{\Phi}}\log x$, $B=\frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}}+C-\log\eta(\alpha)\eta(\beta)\right)$ et $|C(x)|\leqslant\frac{4\pi\log 2}{\sqrt{\Delta}}$.

Preuve.

Clair par la proposition précédente.

♯

Remarque 7

Nous allons reprendre l'étude sans faire l'approximation grossière consistant à comparer un nombre par sa partie réelle.

Proposition 28

En mettant tous les éléments ensemble : $I(x)=\frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{\log x}{2}+\log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}}+C-\log\eta(\alpha)\eta(\beta)\right)-$
$2\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\left(\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)}+\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

Preuve.

$I(x)=\frac{2}{a}\frac{\pi^2}{6}+O\left(\frac{\Re(a)}{\sqrt{x}}\right)+\frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{\log x}{2}+\log 2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}}+C\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\log\eta(\alpha)-\frac{i\pi\alpha}{12}\right)+$
$O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}}\left(\log\eta(\beta)-\frac{i\pi\beta}{12}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-2\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\left(\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)}+\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)}\right)$. Et on a $O\left(\frac{\Re(a)}{\sqrt{x}}\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. De plus, comme $\frac{\pi^2\alpha}{3\sqrt{\Phi}}+\frac{\pi^2\beta}{3\sqrt{\Phi}}=\frac{\pi^2}{3\sqrt{\Phi}}(\alpha+\beta)=\frac{\pi^2}{3a}$, on conclut.

♯

Proposition 29

On a : $\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)}=\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_2(x,v)+\frac{bv}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right).$

Preuve.

Notons $U(x,v)$ sa somme,supposons $x > \max\left\{1, \frac{\Delta}{4\,\Re(c)}\right\}$ et posons $\gamma = [u_2(x,v)] + 1$.

Montrons que : $D(x,v) := \left| \sum\limits_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{1}{q(u,v)} - \int\limits_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty} \frac{dt}{q(t,v)} \right| = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Nous avons : $D(x,v) = \left| \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \left(\frac{1}{q(u,v)} - \frac{1}{q(t,v)}\right) dt \right| \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \left| \frac{1}{q(u,v)} - \frac{1}{q(t,v)} \right| dt =$

$\sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \left| \frac{a(t^2-u^2)+bv(t-u)}{q(u,v)q(t,v)} \right| dt \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{|a||t^2-u^2|+|b|v|t-u|}{|q(u,v)|\ |q(t,v)|} dt.$

On a : $|t| \leqslant |u|+1$ et $|t| \geqslant |u|-1$ donc $t^2 \leqslant u^2+2|u|+1$ et $t^2 \geqslant u^2-2|u|+1$, ainsi, $t^2 \in [u^2-2|u|+1, u^2+2|u|+1]$, ce qui implique $|t^2-u^2| \in [-2|u|+1, 2|u|+1]$, finalement $|t^2-u^2| \leqslant 2|u|+1$.

Ce qui implique $D(x,v) \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{|a|(2|u|+1)+|b|v}{\Re\left(q(u,v)\right)\Re\left(q(t,v)\right)} dt \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{2|a||u|+(|a|+|b|)v}{\Re\left(q(u,v)\right)\Re\left(q(t,v)\right)} dt.$

Occupons nous dans un premier temps de $\sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{(|a|+|b|)v}{\Re\left(q(u,v)\right)\Re\left(q(t,v)\right)} dt$: nous avons vu dans la preuve de la proposition 15 que $\Re\left(q(u,v)\right) \geqslant \Re\left(q(\gamma,v)\right) \geqslant \Re\left(q(u_2(x,v),v)\right) = x$ pour $u \in [u_2(x,v),\infty)$. Donc $\sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{(|a|+|b|)v}{\Re\left(q(u,v)\right)\Re\left(q(t,v)\right)} dt \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{(|a|+|b|)v}{x\,\Re\left(q(t,v)\right)} dt = \frac{(|a|+|b|)v}{x} \int\limits_{\gamma}^{\infty} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)}$

$\leqslant \frac{(|a|+|b|)v}{x} \int\limits_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} \overset{\text{prop 15}}{=} \frac{(|a|+|b|)v}{x} \frac{2}{v\sqrt{\Delta}} \arcsin \frac{v}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)\,x}} = O\left(\frac{1}{x}\right).$

Et ainsi $D(x,v) \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a||u|}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right)$.

(I) Supposons $\gamma \leqslant 1$, i.e. $[u_2(x,v)]+1 \leqslant 1$ donc $[u_2(x,v)] \leqslant 0$, ainsi $u_2(x,v) < 1$, autrement dit $-\Re(b)\,v + \sqrt{4\,\Re(a)\,x - \Delta v^2} < 2\,\Re(a)$, ce qui implique $4\,\Re(a)\,x - \Delta v^2 < 4\,\Re(a)^2 + 4\,\Re(a)\,\Re(b)\,v + \Re(b)^2\,v^2$ ou encore $0 < \Re(c)\,v^2 + \Re(b)\,v + \Re(a) - x$, le discriminant de cette inéquation étant $\delta = -\Delta + 4\,\Re(c)\,x > 0$ et v devant être positif, on voit facilement que $v \in \left\{ \left[\frac{\Re(b)+\sqrt{4\,\Re(c)x-\Delta}}{2\,\Re(c)}\right], \ldots, \left[2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}\right] \right\}$. Comme nous avons que $\frac{\Re(b)+\sqrt{4\,\Re(c)x-\Delta}}{2\,\Re(c)} - 1 \leqslant v \leqslant 2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}$, il existe donc $h, h' \in [0,\infty)$ tels que $h\sqrt{x} \leqslant v \leqslant h'\sqrt{x}$. On a $\sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a||u|}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} \leqslant \frac{2|a|}{\lambda} \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{|u|}{u^2+v^2} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{dt}{t^2+v^2} \leqslant \frac{2|a|}{\lambda} \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{|u|}{u^2+h^2x} \frac{1}{\theta_u^2+h^2x}$, où $\theta_u \in (u,u+1)$ donc $\sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a||u|}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} \leqslant \frac{2|a|}{\lambda} \left(\sum\limits_{u=\gamma}^{-1} \frac{-u}{(u^2+h^2x)((u+1)^2+h^2x)} + \sum\limits_{u=1}^{\infty} \frac{u}{(u^2+h^2x)^2} \right)$.

En faisant le changement de variables $t = u+1$, $\sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a||u|}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} \leqslant \frac{2|a|}{\lambda} \left(\sum\limits_{t=\gamma+1}^{0} \frac{-t+1}{(t^2+h^2x)^2} \right.$ $\left. + \sum\limits_{u=1}^{\infty} \frac{u}{(u^2+h^2x)^2} \right) \leqslant \frac{2|a|}{\lambda} \left(\sum\limits_{t=\gamma+1}^{-1} \frac{-2t}{(t^2+h^2x)^2} + \sum\limits_{u=1}^{\infty} \frac{u}{(u^2+h^2x)^2} \right) + \frac{1}{h^4x^2} \leqslant \frac{6|a|}{\lambda \sum_{u=0}^{\infty} \frac{u}{(u^2+h^2x)^2}} + \frac{1}{h^4x^2} \leqslant$ $\frac{6|a|}{\lambda \int\limits_{0}^{\infty} \frac{u\,du}{(u^2+h^2x)^2}} + \frac{1}{h^4x^2} \overset{t=u^2+h^2x}{=} \frac{3|a|}{\lambda} \int\limits_{h^2x}^{\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{h^4x^2} = \frac{3|a|}{2\lambda h^2x} + \frac{1}{h^4x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right).$

(II) Supposons $\gamma > 1$, alors $D(x,v) \leqslant \sum\limits_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a|u}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int\limits_{u}^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right)$. Mais comme $\Re\left(q(u,v)\right)$

est croissante pour $u \in [u_2(x,v),\infty)$ (preuve de la proposition 15), on a $\sum_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a|u}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int_u^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(t,v)\right)} \leqslant$

$$\sum_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a|u}{\Re\left(q(u,v)\right)} \int_u^{u+1} \frac{dt}{\Re\left(q(u,v)\right)} = \sum_{u=\gamma}^{\infty} \frac{2|a|u}{\Re\left(q(u,v)\right)^2} \leqslant \int_\gamma^{\infty} \frac{2|a|u\ du}{\Re\left(q(u,v)\right)^2} \leqslant \int_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{2|a|u\ du}{\Re\left(q(u,v)\right)^2} =$$

$$\int_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{2|a|\,\Re(a)\,u\ du}{((\Re(a)\,u+\frac{\Re(b)v}{2})^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2} \overset{t=\Re(a)\,u+\frac{\Re(b)\,v}{2}}{=} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{2|a|(t-\frac{\Re(b)v}{2})\ dt}{\Re(a)\,(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2)^2} \overset{y=t^2+\frac{\Delta v^2}{4}}{=}$$

$$\frac{|a|}{\Re(a)} \int_{\Re(a)x}^{\infty} \frac{dy}{y^2} - \frac{|a|\,\Re(b)\,v}{\Re(a)} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2} = \frac{|a|}{2\,\Re(a)^2\,x} - \frac{|a|\,\Re(b)\,v}{\Re(a)} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2} =$$

$O\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{|a|\,\Re(b)\,v}{\Re(a)} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2}$. Donc $D(x,v) \leqslant O\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{|a|\,\Re(b)\,v}{\Re(a)} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2}$.

Or, nous savons que $D(x,v) \geqslant 0$, ce qui veux dire que si $\Re(b) > 0$, $-\frac{|a|\,\Re(b)\,v}{\Re(a)} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2} =$

$O\left(\frac{1}{x}\right)$. Mais il est immédiat que l'intégrale de dépend pas du signe de $\Re(b)$, et ainsi quelque soit $\Re(b)$

$$-\frac{|a|\,\Re(b)\,v}{\Re(a)} \int_{\frac{\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2}}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+\frac{\Delta v^2}{4})^2} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Finalement, $D(x,v) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, indépendamment de v !

Soit $u \geqslant u_2(x,v)$ (et donc $u \in \mathbb{R}$), on a alors $\frac{\partial}{\partial u}\Re\left(q(u,v)\right) = 2\,\Re(a)\,u + \Re(b)\,v \geqslant 2\,\Re(a)\,u_2(x,v) + \Re(b)\,v = \sqrt{4\,\Re(a)\,x - \Delta v^2} \geqslant 0$, donc sur $[u_2(x,v),\infty)$ $u \mapsto \Re\left(q(u,v)\right)$ est croissante, donc sur $[u_2(x,v),\infty)$ $u \mapsto \frac{1}{\Re\left(q(u,v)\right)}$ est décroissante.

La deuxième formule de la moyenne dit : $\left|\int_{u_2(x,v)}^{[u_2(x,v)]+1} \frac{du}{q(u,v)}\right| \leqslant \int_{u_2(x,v)}^{[u_2(x,v)]+1} \frac{du}{|q(u,v)|} \leqslant \int_{u_2(x,v)}^{[u_2(x,v)]+1} \frac{du}{\Re\left(q(u,v)\right)} =$

$\frac{1}{\Re\left(q(u_2(x,v),v)\right)} \int_{u_2(x,v)}^{\eta} du = \frac{\rho(x,v)}{\Re\left(q(u_2(x,v),v)\right)}$, où $u_2(x,v) \leqslant \eta \leqslant [u_2(x,v)]+1$, $0 \leqslant \rho(x,v) = \eta - u_2(x,v) \leqslant$ 1. Et comme $\Re(a)\,\Re\left(q(u_2(x,v),v)\right) = \left(\Re(a)\,u_2(x,v) + \frac{\Re(b)\,v}{2}\right)^2 + \frac{\Delta v^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{4\,\Re(a)\,x-\Delta v^2}}{2}\right)^2 + \frac{\Delta v^2}{4} = \frac{4\,\Re(a)\,x-\Delta v^2}{4} + \frac{\Delta v^2}{4} = \Re(a)\,x$ donc $\Re\left(q(u_2(x,v),v)\right) = x$. Et ainsi

$$\left|U(x,v) - \int_{u_2(x,v)}^{\infty} \frac{du}{q(u,v)}\right| = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il reste donc a calculer cette intégrale $\int \frac{du}{q(u,v)} = \int \frac{adu}{\left(au+\frac{bv}{2}\right)^2 + \frac{-\Phi v^2}{4}}$, on pose $t = au + \frac{bv}{2}$, et alors $\int \frac{du}{q(u,v)} = \int \frac{dt}{t^2+\frac{-\Phi v^2}{4}} = \frac{4}{-\Phi v^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{2t}{v\sqrt{-\Phi}}\right)^2+1}$ on pose $s = \frac{2t}{v\sqrt{-\Phi}}$, ce qui donne finalement

$$\int \frac{du}{q(u,v)} = \frac{4}{-\Phi v^2}\frac{v\sqrt{-\Phi}}{2} \int \frac{ds}{1+s^2} = \frac{2}{v\sqrt{-\Phi}} \arctan s + C = \frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}} \arctan \frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au+\frac{bv}{2}\right) + C.$$

Comme $\lim_{u\to\infty} \arctan \frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au+\frac{bv}{2}\right) = \lim_{u\to\infty} \arctan \frac{-2iu}{v\sqrt{\Phi}}\left(a+\frac{bv}{2u}\right) = \lim_{u\to\infty} \arctan \frac{-2iua}{v\sqrt{\Phi}} =$

$$-\frac{i}{2}\lim_{u\to\infty}\log\frac{v\sqrt{\Phi}+2ua}{v\sqrt{\Phi}-2ua}=-\frac{i}{2}\lim_{u\to\infty}\log\frac{u\left(\frac{v\sqrt{\Phi}}{u}+2a\right)}{u\left(\frac{v\sqrt{\Phi}}{u}-2a\right)}=-\frac{i}{2}\log(-1)=-\frac{i}{2}i\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\int\limits_{u_2(x,v)}^{\infty}\frac{du}{q(u,v)}$ vaut $\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_2(x,v)+\frac{bv}{2}\right)\right)$ donc elle existe. Finalement :

$$\int\limits_{u_2(x,v)}^{\infty}\frac{du}{q(u,v)}=\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_2(x,v)+\frac{bv}{2}\right).$$

♯

Proposition 30

On a : $\sum\limits_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)}=\frac{2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_1(x,v)+\frac{bv}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right).$

Preuve.

On conclut comme dans la preuve précédente.

♯

Proposition 31

On a : $\sum\limits_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)}+\sum\limits_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)}=\left(\frac{2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_1(x,v)+\frac{bv}{2}\right)+\right.$
$\left.\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_2(x,v)+\frac{bv}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{x}\right).$

Preuve.

Triviale par ce qui précéde.

♯

Proposition 32

On a : $\sum\limits_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\left(\sum\limits_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)}+\sum\limits_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)}\right)=$
$\sum\limits_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\left(\frac{2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_1(x,v)+\frac{bv}{2}\right)+\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_2(x,v)+\frac{bv}{2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

Preuve.

Pour $K\in\mathbb{R}$, on a : $\sum\limits_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\frac{K}{x}=\frac{K}{x}\sum\limits_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

♯

Proposition 33

On a pour les formes quadratiques (a,b,c) définies postives telles que la fonction de droite soit Riemann-intégrable (nous montrerons dans la proposition suivante qu'il existe de telles formes) :

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\left(\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)}+\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)}\right)=\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\int_0^1\frac{1}{t}\log\frac{\omega t^2+\rho t\sqrt{1-t^2}-a\Delta}{\omega t^2-\rho t\sqrt{1-t^2}-a\Delta}dt,$$

où $\omega = 2i\,\Re(a)\,(\Re(a)\,\Im(c) - \Re(b)\,\Im(b))$, et $\rho = -2\,\Re(a)\,\sqrt{\Delta}\sqrt{\Phi}$.

Preuve.

On a : $\sqrt{\Phi}\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{2i}{v\sqrt{\Phi}}\text{arccotan}\frac{-2i}{v\sqrt{\Phi}}\left(au_1(x,v)+\frac{bv}{2}\right) = \sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{2i}{v}\text{arccotan}\frac{-i}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{2au_1(x,v)}{v}+b\right) =$ $\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{2i}{v}\frac{-i}{2}\log\frac{\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{2au_1(x,v)}{v}+b\right)-1}{\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\left(\frac{2au_1(x,v)}{v}+b\right)+1} = \sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{1}{v}\log\frac{\frac{2a}{v}\frac{-\Re(b)v-\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2\,\Re(a)}+b-\sqrt{\Phi}}{\frac{2a}{v}\frac{-\Re(b)v-\sqrt{4\,\Re(a)x-\Delta v^2}}{2\,\Re(a)}+b+\sqrt{\Phi}} =$ $\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{\sqrt{x}}{v}\log\frac{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a}{\Re(a)}\sqrt{4\,\Re(a)\left(\frac{\sqrt{x}}{v}\right)^2-\Delta}+b-\sqrt{\Phi}}{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a}{\Re(a)}\sqrt{4\,\Re(a)\left(\frac{\sqrt{x}}{v}\right)^2-\Delta}+b+\sqrt{\Phi}}\frac{1}{\sqrt{x}}$, en posant $t_v = \frac{v}{\sqrt{x}}$, on obtient que : $\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}} \frac{1}{t_v}\log\frac{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a}{\Re(a)}\sqrt{\frac{4\,\Re(a)}{t_v^2}-\Delta}+b-\sqrt{\Phi}}{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a}{\Re(a)}\sqrt{\frac{4\,\Re(a)}{t_v^2}-\Delta}+b+\sqrt{\Phi}}(t_{v+1}-t_v)$; et c'est maintenant, en faisant tendre x vers l'infini, que nous reconaissons une somme de Riemann : $\int_0^{2\sqrt{\frac{\Re(a)}{\Delta}}} \frac{1}{t}\log\frac{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a}{\Re(a)}\sqrt{\frac{4\,\Re(a)}{t^2}-\Delta}+b-\sqrt{\Phi}}{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a}{\Re(a)}\sqrt{\frac{4\,\Re(a)}{t^2}-\Delta}+b+\sqrt{\Phi}}dt$, on pose $z = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{\Re(a)}}$, la somme devient : $\int_0^1 \frac{1}{z}\log\frac{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a\sqrt{\Delta}}{\Re(a)}\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}+b-\sqrt{\Phi}}{\frac{-a\,\Re(b)}{\Re(a)}-\frac{a\sqrt{\Delta}}{\Re(a)}\sqrt{\frac{1}{z^2}-\Delta}+b+\sqrt{\Phi}}dz$.

Posons $f = \frac{-a\,\Re(b)+(b-\sqrt{\Phi})\,\Re(a)}{a\sqrt{\Delta}}$, et $g = \frac{-a\,\Re(b)+(b+\sqrt{\Phi})\,\Re(a)}{a\sqrt{\Delta}}$.

Ainsi : $\lim_{x\to\infty}\sum_{v=1}^{2\sqrt{\frac{\Re(a)x}{\Delta}}}\sum_{u=-\infty}^{[u_1(x,v)]}\frac{1}{q(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\int_0^1\frac{1}{z}\log\frac{-\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}+f}{-\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}+g}dz = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\int_0^1\frac{1}{z}\log\frac{-\sqrt{1-z^2}+fz}{-\sqrt{1-z^2}+gz}dz$.

De même : $\lim_{x\to\infty}\sum_{u=[u_2(x,v)]+1}^{\infty}\frac{1}{q(u,v)} = \frac{-1}{\sqrt{\Phi}}\int_0^1\frac{1}{z}\log\frac{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}+f}{\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}+g}dz = \frac{-1}{\sqrt{\Phi}}\int_0^1\frac{1}{z}\log\frac{\sqrt{1-z^2}+fz}{\sqrt{1-z^2}+gz}$.

Or $\frac{-\sqrt{1-z^2}+fz}{-\sqrt{1-z^2}+gz}\frac{\sqrt{1-z^2}+gz}{\sqrt{1-z^2}+fz} = \frac{(fg-1)z^2+(f-g)\sqrt{1-z^2}z-1}{(fg-1)z^2+(g-f)\sqrt{1-z^2}z-1}$. Finalement, amplifions par $a\Delta$ et posons $\omega = a\Delta(fg-1)$, $\rho = a\Delta(f-g)$. Un rapide calcul montre que les ω, ρ de l'énoncé sont bien égaux à ceux définis ici.

♯

Proposition 34

Deux conditions suffisantes pour que la fonction de la proposition précédente soit Riemann-Intégrable :

$$\left(\Re\left(\sqrt{\Phi}\right)\right)^2 < \Delta.$$

$$\left(\Im\left(\sqrt{\Phi}\right)\right)^2 < \frac{\Im(a)^2\,\Delta}{\Re(a)^2} + \frac{\Im(a)}{\Re(a)}\,\Re(b)\,\Im(b) - 2\,\Im(a)\,\Im(c)\,.$$

Preuve.

Il s'agit d'étudier la fonction $f(t) := \frac{1}{t}\log\frac{\omega t^2+\rho t\sqrt{1-t^2}-a\Delta}{\omega t^2-\rho t\sqrt{1-t^2}-a\Delta}$ sur $[0,1]$.

On a (clairement) que $f(0) = f(1) = 0$. Il s'agit donc d'étudier $f(t)$ sur $(0,1)$. Comme les seuls endroits d'ou peuvent venir les problèmes sont le numérateur et le dénominateur du log, nous ramenons létude

sur $f(t)$ à celle des zéros du numérateur et du dénominateur. Posons $g(t) = \dfrac{\omega t^2 + \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta}{\omega t^2 - \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta}$, où $t \in (0,1)$. En effectuant le changement de variable $t = \sin x$, on a $g(x) = \dfrac{\omega \sin^2 x + \rho \sin x \cos x - a\Delta}{\omega \sin^2 x - \rho \sin x \cos x - a\Delta}$, où $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ou encore $g(x) = \dfrac{(\omega - a\Delta)\sin^2 x + \rho \sin x \cos x - a\Delta \cos^2 x}{(\omega - a\Delta)\sin^2 x - \rho \sin x \cos x - a\Delta \cos^2 x}$, simplifiant par $cos^2 x \neq 0$, on obtient $g(x) = \dfrac{(\omega - a\Delta)\tan^2 x + \rho \tan x - a\Delta}{(\omega - a\Delta)\tan^2 x - \rho \tan x - a\Delta}$. Effectuant le changement de variable $y = \tan x$, on a $g(y) = \dfrac{(\omega - a\Delta)y^2 + \rho y - a\Delta}{(\omega - a\Delta)y^2 - \rho y - a\Delta}$, où $y \in (0, \infty)$. Il est temps de constater que les zéros du numérateurs sont les opposés de ceux du dénominateur (application directe de la formule du **delta**), nous allons juste chercher à voir si la fonction $h(y) = (\omega - a\Delta)y^2 + \rho y - a\Delta$ possède des zéros réels. Il est clair que si nous prenons les parties réelle et imaginaire de cette équation, une condition suffisante pour que $h(y) \neq 0$ pour $y \in \mathbb{R}$ serra que les discriminants de ces deux équations soient négatifs. Un calcul directe donne les deux conditions.

♯

Remarque 8

Toutes les formes quadratiques réelles vérifient la première condition.

La forme $(1+i, 0, 1+3i)$ ne vérifie que la seconde condition.

La forme $(1, 0, 1)$ ne vérifie que la première condition.

Les conditions ne sont pas nécessaires, car par exemple $(1-4i, 0, 1-16i)$ ne vérifie aucune de ces deux relations; alors que les zéros de $h(y)$ de cette forme sont complexes.

Conjecture 1

Pour toutes formes quadratiques définies positives, h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve.

C'est une conjecture ...

Mais d'autres part, quelques heures de simulation numérique ont une grande tendance à me pousser à formuler une telle conjecture.

♯

Déclaration 4

Nous allons finir l'exposé en supposant la conjecture vraie (si l'on veut une version entièrement prouvée, il suffit de se restreindre aux formes quadratiques définies positives vérifiant une des deux conditions de la proposition précédente, ce qui en fait déjà un grand nombre).

Théorème 2

Pour (a, b, c) une forme quadratique définie positive, $x \in \mathbb{R}^+$ grand, on a

$$\sum_{(u,v)\in E(x)} \frac{1}{au^2 + buv + cv^2} = A \log x + B + D + o(1),$$

où $A = \dfrac{2\pi i}{\sqrt{\Phi}} \log x$, $B = \dfrac{4\pi i}{\sqrt{\Phi}} \left(\log 2 \sqrt{\dfrac{\Re(a)}{\Delta}} + C - \log \eta(\alpha)\eta(\beta) \right)$ et pour ω, ρ sont définis précédement, $D = \dfrac{1}{\sqrt{\Phi}} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} \log \frac{\omega t^2 + \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta}{\omega t^2 - \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta} dt.$

Preuve.

Il suffit de mettre les éléments ensembles.

♯

Théorème 3

On a $\left| \dfrac{1}{\sqrt{\Phi}} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} \log \frac{\omega t^2 + \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta}{\omega t^2 - \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta} dt \right| \leqslant \dfrac{4\pi \log 2}{\sqrt{\Delta}}.$

Preuve.

Le théorème 1 nous dit : $I(x) = A \log x + B + C(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $|C(x)| \leqslant \dfrac{4\pi \log 2}{\sqrt{\Delta}}$.

Le théorème 2 nous dit : $I(x) = A \log x + B + D + o(1)$.

Ainsi, pour tout x suffisament grand, on a : $0 = |I(x) - I(x)| =$

$$\left| A \log x + B + C(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - A \log x - B - D - o(1) \right| = \left| C(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - D - o(1) \right|$$

donc $0 = \lim\limits_{x\to\infty} \left| C(x) + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) - D - o(1) \right| = \lim\limits_{x\to\infty} |C(x) - D|$. C'est-à-dire $\lim\limits_{x\to\infty} C(x) = D$.

♯

Théorème 4

Pour une forme quadratique définie positive réele, on a $\dfrac{1}{\sqrt{\Phi}} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} \log \frac{\omega t^2 + \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta}{\omega t^2 - \rho t\sqrt{1-t^2} - a\Delta} dt = \dfrac{4\pi \log 2}{\sqrt{\Delta}}.$

Preuve.

C'est une comparaison directe entre le cas réel et le cas complexe.

♯

BIBLIOGRAPHIE

[1] Antoine Derighetti : *Cours de l'année académique 1995-1996 : Séries trigonométriques et formes quadratiques.*

[2] Edmund Landau: *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Vertheilung der Vertheilung der Primideale*, Journal fúr die reine angew. Math. 125 (1902), pp 64-188.

[3] Konrad Knopp: *Theory & Application Of Infinite series*, 1971, Hafner Publishing Company, New York.

[4] Tom M. Apostol: *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, 1976, Springer-Verlag, New York.

[5] B. Schoeneberg: *Elliptic Modular Functions*, 1974, Springer-Verlag, Berlin.

[6] F. Mertens: *Über einen asymptotischen Ausdruck*, Sitzungsberichte der Kaiserlichten Akademie der Wissenschaften zu Wien, Abtheilung II a, Band. 106 (1897), pp 411-421.

Grégoire Favre, Institut de Mathématique, 1015 Lausanne
E-mail address: gregoire.favre@ima.unil.ch